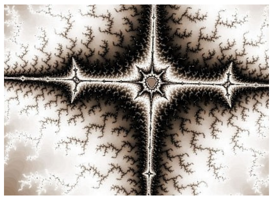
Un exemple de fractale : La courbe de Koch

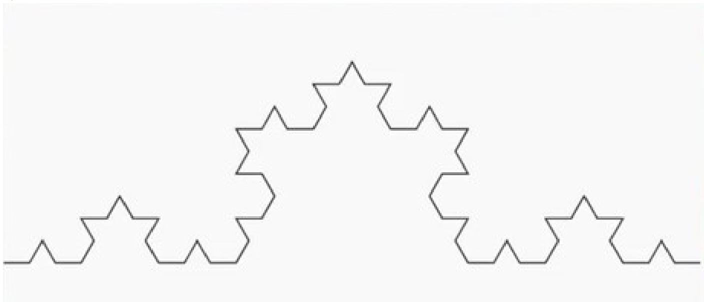


Une courbe **fractale** est une courbe qui présente une structure similaire à toutes les échelles. En zoomant sur une partie de la figure, il est possible de retrouver toute la figure ; on dit alors qu'elle est auto similaire.

Ma première courbe fractale

Tracer au crayon à papier un segment de 18 cm. Le partager en 3.
Construire un triangle équilatéral qui repose sur le tiers central. Effacer sa base.

Recommencer l'opération sur chacun des 4 segments
on voit qu'on peut répéter l'opération autant qu'on le voudra (du moins autant que nous saurons dessiner assez fin avec notre crayon...)



La courbe de Koch est celle que l'on obtient en répétant le procédé à l'infini.
Il s'agit bien d'une **fractale** et même d'un fractale dite **auto-similaire** puisque quel que soit l'agrandissement on retrouvera le même motif.

Quelle est la dimension de ma courbe de Koch ?

En passant de mon segment de 18 cm au 4 premiers segments, j'ai enlevé le tiers du segment et je l'ai remplacé par 2 sous-segments de 1 tiers.

Au total j'ai augmenté ma longueur de $\frac{1}{3}$. A chaque fois que je reproduis mon motif, je multiplie la longueur de ma courbe par $\frac{4}{3}$.

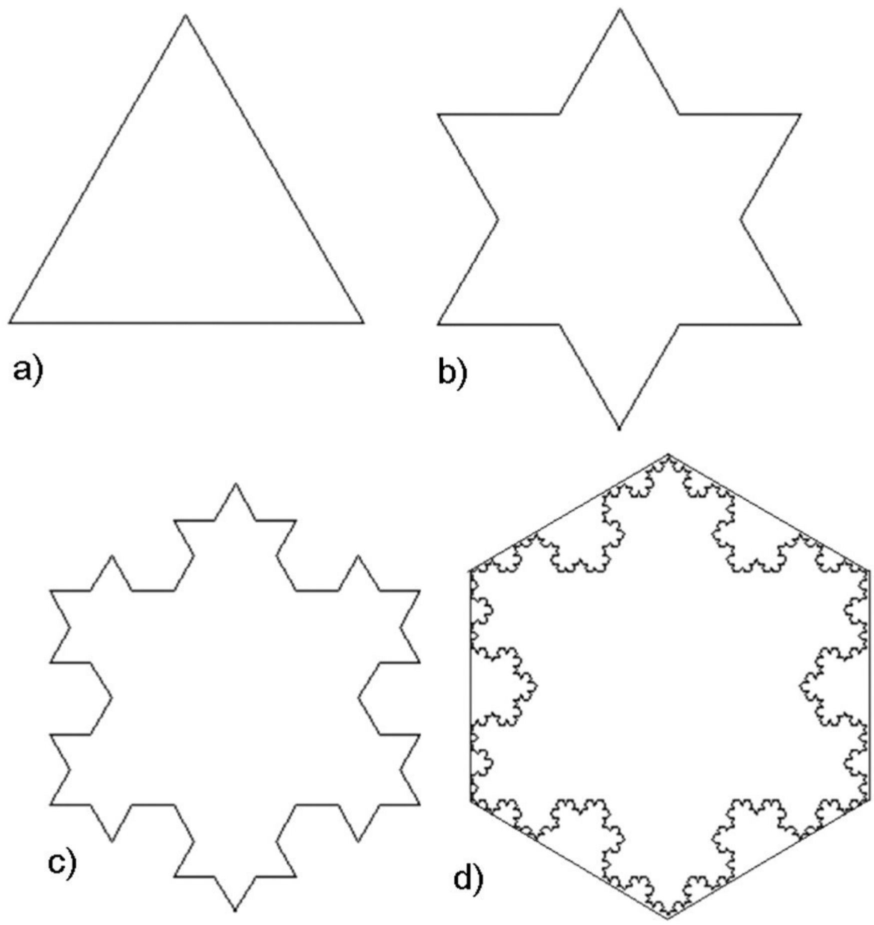
Dimension d'un objet mathématique :

- une longueur a une dimension 1 : si je double ma longueur je multiplie la longueur par 2^1
- une surface a une dimension 2 : si je double les dimensions de ma figure je multiplie la surface par 2^2
- un volume a une dimension 3 : si je double les dimensions de ma figure je multiplie le volume par 2^3
- par extension si un objet mathématique a une dimension d : si je multiplie les dimensions de cet objet par n, je multiplie l'objet par n^d

Dans le cas de ma courbe de Koch, la longueur de ma courbe est multipliée par 4 lorsque sa taille triple puisque cette courbe sera définie comme étant constituée de quatre copies d'elle-même, trois fois plus petites.

On a donc $3^d = 4$ soit $\boxed{d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26}$

On voit donc que notre courbe de Koch a une dimension non entière qui est comprise entre la dimension d'une longueur (1) et celle d'une surface (2).



Flocon de Koch