# 1er théorème de Gödel
# Théorème d'incomplétude

Cette présentation très simplifiée est directement tirée de l'excellent cours de B. Meles ''Philosophie de l'informatique'', cours dispensé dans le cadre du master d'épistémologie de l'université de Nancy

Envisageons toutes les combinaisons possibles entre vérité et prouvabilité pour un énoncé en général. Un énoncé peut être :

1. vrai et prouvable;
2. vrai et non-prouvable;
3. faux et prouvable;
4. faux et non-prouvable.

Le tableau suivant résume toutes ces combinaisons :

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| Prouvable | 1 | 3 |
| Non Prouvable | 2 | 4 |

Analysons maintenant ces différents cas de figure :

— les cas 1 et 4 sont généralement ceux qui nous arrangent : quand quelque chose est vrai, on aimerait pouvoir le prouver (et si on peut le prouver, alors il vaut mieux qu'il soit vrai); et quand un énoncé est faux, il vaut mieux que l'on ne puisse pas le prouver!

— Le cas 3 serait une catastrophe : on pourrait prouver des choses fausses! La théorie serait **inconsistante**. Espérons donc que cette case reste vide...

— Le cas 2 n'est pas du tout idéal, car si cette case n'est pas vide, cela veut dire que **la théorie n'est pas complète**, qu'il y a des choses vraies que l'on ne peut pas démontrer. Mais par rapport à l'inconsistance, le cas 2 est un moindre mal infiniment préférable.

Examinons maintenant l'énoncé qui dit « je ne suis pas prouvable ». Dans quelle case faut-il l'inscrire ?

1. Supposons qu'il aille dans la case 1 : il serait vrai et prouvable. Mais s'il est vrai, alors il doit avoir raison de dire qu'il n'est pas prouvable. Il ne devrait donc pas être prouvable. Nous arrivons donc à une contradiction, car en partant de l'hypothèse qu'il est vrai et prouvable, nous arrivons à la conclusion qu'il n'est pas prouvable. Cet énoncé ne va donc pas dans la case 1.

2. Supposons qu'il aille dans la case 4 : il serait faux et non-prouvable. Or s'il est faux, il doit avoir tort de dire qu'il n'est pas prouvable. C'est donc qu'il est prouvable. Nous arrivons encore à une contradiction, car en supposant qu'il est faux et non-prouvable, nous arrivons à la conclusion qu'il doit être prouvable.

3. Supposons qu'il aille dans la case 3 : il serait faux et prouvable. Or s'il est prouvable, on peut le prouver, c'est-à-dire prouver qu'il n'est pas prouvable. Si on peut le prouver, alors c'est que c'est vrai ; et si c'est vrai, c'est que ce n'est pas faux... On arrive à une nouvelle contradiction : si l'on suppose qu'il est faux

 

et prouvable, on arrive à la conclusion qu'il est vrai.

4. Supposons enfin qu'il aille dans la case 2 : il serait vrai et non prouvable. Cette fois, l'hypothèse est cohérente ; car s'il dit vrai, alors il n'est effectivement pas prouvable, et s'il n'est pas prouvable, alors il est bien vrai.

Trois des quatre cases du tableau (les cases 1, 3 et 4) mènent à des contradictions. Si l'arithmétique* est consistante, c'est-à-dire précisément dénuée de contradiction, alors il existe au moins un énoncé qui figure dans la case 2.

En d'autres termes : *si l'arithmétique est consistante,alors elle est incomplète* — et c'est bien ce que nous voulions démontrer : le premier **théorème d'incomplétude**.

On en conclut immédiatement que si l'arithmétique est complète (c'est-à-dire si tout ce qui est vrai est démontrable et que tout ce qui n'est pas prouvable est faux), alors elle est inconsistante.
La complétude, qui exige que les cases 2 et 3 du tableau soient vides, nous forcerait en effet à rabattre la proposition sur les cases 1 ou 4, qui mènent à des contradictions.
L'hypothèse de la complétude de l'arithmétique nous mènerait ainsi à la conclusion qu'elle serait inconsistante, ce qui, pour le coup, serait assez catastrophique.
À tout prendre, il vaut mieux une théorie consistante mais incomplète (case 2) qu'une théorie complète mais inconsistante (case 3). Loin d'être une catastrophe, l'incomplétude est donc un moindre mal. C'est le seul moyen de sauver l'espoir de consistance, et à travers lui l'ensemble des mathématiques.

* *Nous parlons d'arithmétique car le 1er théorème de Gödel, sous sa forme rigoureuse et mathématique, s'appuie sur un système de codage des propositions arithmétiques et s'applique donc à l'arithmétique, même s'il peut facilement être étendu à tout système logique.*