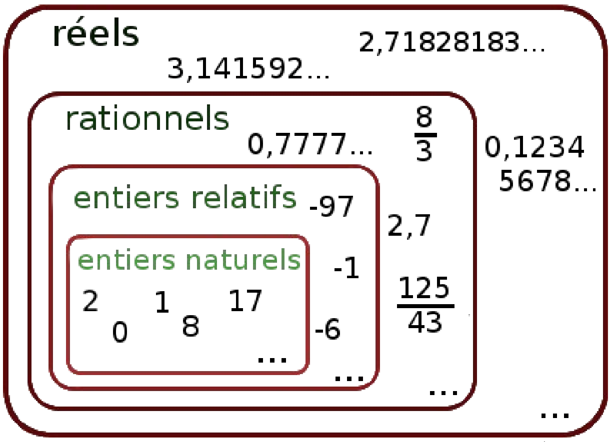
Nombres (ir)rationnels et fractions

Raisonnement par l'absurde

1. Les ensembles de nombres



Les nombres entiers : 0, 1, 2, 3, ….
constituent l'ensemble N des **entiers naturels.**

En ajoutant à ces entiers positifs les entiers négatifs -1, -2, -3,…
on obtient l'ensemble Z des **entiers relatifs.**

L'ensemble Q des **nombres rationnels** comporte toutes les fractions.

On rappelle qu'une fraction est un quotient de 2 entiers naturels $\frac{a}{b}$

L'ensemble R des nombres **réels** est constitués des nombres rationnels et des nombres irrationnels : π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e,…

2. Double distributivité

La double distributivité permet de dire que :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Appliquons cette double distributivité pour **montrer que le carré d'un nombre impair est impair.**
Un nombre impair peut s'écrire 2n+1. Calculez $(2n + 1)^2$ en utilisant la double distributivité (ou les idendités remarquables)

Conclure sur la parité de $(2n + 1)^2$

3. Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Raisonnement par l'absurde :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel alors il peut d'écrire sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

avec a et b deux entiers sans diviseur commun.

En élevant l'égalité précédente au carré on obtient $2=\frac{a^2}{b^2}$ ou $a^2=2\,b^2$

Donc a^2 est pair donc a est pair
Montrer que ceci découle de la propriété que vous avez démontré au paragraphe précédent :

Si a est pair il existe un nombre entier k tel que a = 2k on a donc
$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$
Donc $a^2 = 2b^2 = 4k^2$ ce qui donne $b^2 = 2k^2$
Conclure sur la parité de b :

Montrer pourquoi les résultats obtenus ne sont pas compatibles avec l' irréductibilité de la fraction $\frac{a}{b}$:

Conclure sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$:

4. Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel

On établira les résultats préliminaires suivants :

- "Si p est un multiple de 3, alors p^2 est un multiple de 3"
- "Si p^2 est un multiple de 3, alors p est un multiple de 3"

Puis on tiendra un raisonnement par l'absurde...

Aide :
n multiple de 3, alors n=3p / si n n'est pas un multiple de 3, alors n=3p+1 ou n=3p+2